CAPLP externe et 3ème concours

de Mathématiques - Sciences Physiques

session 2006

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP517, Abymes cedex 97178,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé sur le site Mégamaths

[0][ag66] v1.02 /cmonannalescapesinterne2002a08
Site internet : Mégamaths
© 2008, Dany-Jack Mercier, copie autorisée uniquement pour votre usage personnel

Exercice 1

1. Par hypothèse,

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall x, x' \in I & x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \\ \forall y, y' \in f(I) & y \leq y' \Rightarrow g(y) \geq g(y'), \end{array}\right.$$

donc

$$\forall x, x' \in I \quad x \leq x' \;\Rightarrow\; f(x) \geq f\left(x'\right) \;\Rightarrow\; g(f(x)) \leq g\left(f\left(x'\right)\right),$$

et l'on peut affirmer que $g \circ f$ est croissante sur I.

2. $(\sqrt{2})^2 = 2$ est rationnel alors que $\sqrt{2}$ ne l'est pas. L'assertion proposée est donc fausse.

3. Les solutions de l'équation différentielle $y" = -\omega^2 y$ sont de la forme $y = a\cos\omega t + b\sin\omega t$. La condition $y(0) = 0$ équivaut donc à $a = 0$, ce qui ne suffit pas à assurer la nullité de la fonction y.
Toute fonction $y = b\sin\omega t$ vérifie l'équation $y" = -\omega^2 y$ et la condition initiale $y(0) = 0$ sans pour autant être nulle. L'assertion proposée est donc fausse.

Remarque : Cette question nous invite à revoir l'étude des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants, et pour cela un bon moyen consiste à travailler la leçon d'oral 1 du CAPES externe correspondante que l'on trouvera au Chap. 12 de [2]. Bornons-nous ici à démontrer que les solutions générales de l'équation (E) : $y" = -\omega^2 y$ sont de la forme $y = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ (en suivant la méthode du § 12.3.2 de [2]).

• Pour commencer, on vérifie que les fonctions $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$ sont des solutions particulières de (E).

• Ensuite, on démontre que toute solution $y(t)$ de (E) est de la forme $a\cos\omega t + b\sin\omega t$. Pour cela, une solution $y(t)$ de (E) étant donnée, on détermine les réels a et b de sorte que $z(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ vérifie $z(0) = y(0)$ et $z'(0) = y'(0)$. On trouve

$$a = y(0) \quad et \quad b = \frac{y'(0)}{\omega}.$$

On constate alors que la solution $y - z$ de (E) vérifie les conditions initiales $(y-z)(0) = (y-z)'(0) = 0$, ce qui entraîne $y = z$ compte tenu du Lemme suivant :

Lemme : Si $S_{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des solutions réelles de (E),

$$\left.\begin{array}{l} y \in S_{\mathbb{R}} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0.$$

Preuve du Lemme : Si $y \in S_{\mathbb{R}}$, la fonction $y'^2 + \omega^2 y^2$ est constante puisque $\left(y'^2 + \omega^2 y^2\right)' = 2y'\left(y'' + \omega^2 y\right) = 0$. Par hypothèse $y(0) = y'(0) = 0$, donc la fonction $y'^2 + \omega^2 y^2$ est identiquement nulle. Cela entraîne $y = 0$. ■

4. Plusieurs tests effectués à la main ou à l'aide d'une calculatrice donnent

$$\sum_{k=0}^{2} k^3 = 9 = \left(\sum_{k=0}^{2} k\right)^2 ; \quad \sum_{k=0}^{3} k^3 = 36 = \left(\sum_{k=0}^{3} k\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{7} k^3 = 784 = \left(\sum_{k=0}^{7} k\right)^2 ;$$

de sorte qu'il soit raisonnable de conjecturer que l'égalité $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$ est vraie pour tout n.

Première méthode : Récurrence sur n. Comme $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, il s'agit de prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

La formule est triviale au rang $n = 1$. Si elle est vraie au rang n, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2 (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) \\ &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

et la formule est encore vraie au rang $n+1$.

Seconde méthode : Calculs explicites des sommes. Bien que plus longue que la précédente, il est toujours utile de savoir comment calculer les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$. Posons

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

La somme des n premiers termes d'une progression arithmétique est connue, et l'on sait que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour calculer les deux autres sommes, l'idée est

de sommer des identités remarquables. Puisque $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ (pour tout entier k), on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

soit

$$(n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3S_2 + 3S_1 + n$$

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Puisque $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ (pour tout entier k), on obtient de même

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

d'où $4S_3 = (n+1)^4 - 1 - 6S_2 - 4S_1 - n$, et après simplifications,

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

5. Supposons que f soit monotone sur $\mathbb{R}$, par exemple croissante sur $\mathbb{R}$. Si f est périodique, il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et l'on a en particulier

$$0 \leq x \leq T \;\Rightarrow\; f(0) \leq f(x) \leq f(T) = f(0) \;\Rightarrow\; f(x) = f(0),$$

ce qui montre que f est constante sur $[O, T]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un multiple kT de T ($k \in \mathbb{Z}$) tel que $0 \leq x + kT \leq T$, et dans ce cas

$$f(x) = f(x + kT) = f(0).$$

Cela montre que f est constante sur tout $\mathbb{R}$.

Remarque : Et que répondre si l'on nous demande de prouver l'existence d'un entier k tel que $0 \leq x + kT \leq T$? On peut par exemple introduire la partie entière $[\frac{x}{T}]$ du réel $\frac{x}{T}$, écrire

$$[\frac{x}{T}] \leq \frac{x}{T} < [\frac{x}{T}] + 1, \quad \text{soit} \quad 0 \leq \frac{x}{T} - [\frac{x}{T}] < 1,$$

multiplier tous les membres de ces inégalités par T, pour obtenir

$$0 \leq x - [\frac{x}{T}]T < T.$$

L'existence de $k = -[\frac{x}{T}]$ ne fait plus aucun doute. Une dernière question tout de même : pouvez-vous démontrer l'existence d'une "partie entière" pour n'importe quel réel x ? (Ind. : se placer d'abord dans le cas où $x > 0$, puis utiliser que $\mathbb{N}$ est un ensemble bien ordonné et que $\mathbb{R}$ est archimédien).

6. Une suite réelle strictement croissante ne converge pas nécessairement vers $+\infty$, comme on le voit avec la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers 1.

Remarque : D'après le Théorème des suites monotones, toute suite réelle croissante majorée est convergente (dans $\mathbb{R}$). Il est par ailleurs facile de vérifier qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. On peut donc affirmer que toute suite réelle croissante est convergente dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et qu'une telle suite converge vers une limite finie ou non suivant qu'elle est majorée ou non.

7. Cela est impossible ! Le vecteur v appartient à E, donc s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base $(u_1, u_2, ..., u_n)$. Il existe des réels α_1, ..., α_n, non tous nuls puisque $v \neq 0$, tels que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Nous venons d'écrire une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs u_1, u_2, ..., u_n, v, ce qui prouve que la famille $(u_1, u_2, ..., u_n, v)$ est liée, donc n'est pas une base de E.
Je rappelle qu'une base de E est, par définition, une famille à la fois libre et génératrice de E.

8. Deux droites D et D' non parallèles à l'axe Oy admettent des équations de la forme $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Les coefficients a et a' sont les pentes de D et D', et les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(1, a)$, $\overrightarrow{u}'\,(1, a')$ dirigent respectivement D et D'. Comme le repère est orthonormal,

$$D \perp D' \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}' = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 + aa' = 0 \Leftrightarrow aa' = -1.$$

Exercice 2

I.1. Voir FIG. 1.
I.2. En sautant quelques étapes :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{b-a}{d-a} = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{(1-2i)(2-i)}{5} = -i = e^{-i\pi/2}, \\ Z_2 &= \frac{b-c}{d-c} = \frac{1}{2} \times \frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{2} \times \frac{(1-i)^2}{2} = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/2}. \end{aligned}$$

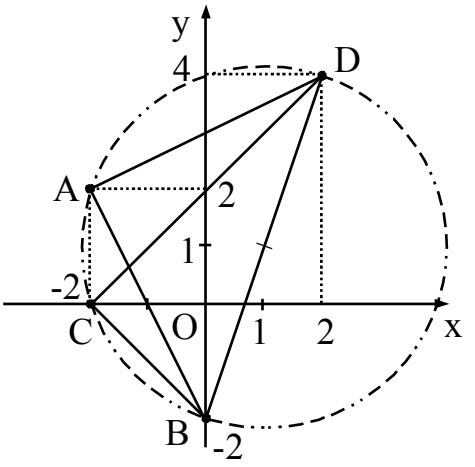

FIG. 1 – Figure demandée en I.1

I.3. Comme $e^{-i\pi/2}$ est un nombre complexe de module 1, nous obtenons $BA = |b-a| = |d-a| = DA$, et le triangle BAD est isocèle en A. Mieux, la relation $b - a = e^{-i\pi/2}(d-a)$ montre que B est l'image de D par la rotation de centre A d'angle $-\pi/2$, de sorte que BAD soit rectangle en A.
L'égalité $b-c = \frac{1}{2}e^{-i\pi/2}(d-c)$ montre que B est l'image de D par la similitude directe de centre C, d'angle $-\pi/2$, et de rapport $1/2$. En particulier, BCD est rectangle en C.

I.4. On sait que le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle appartient au cercle de diamètre l'hypoténuse. Les triangles BAD et BCD étant rectangles en A et C, on peut affirmer que A et C appartiennent au cercle de diamètre $[BD]$, comme dessiné sur la FIG. 1.

II.1. Le critère de cocyclicité en termes d'affixes vu en cours ([1], Corollaire 16) nous donne

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A,\ B,\ C,\ D \text{ alignés ou cocycliques.}$$

Cela s'écrit ici

$$[A, B, C, D] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A,\ B,\ C,\ D \text{ alignés ou cocycliques.}$$

Remarque méthodologique pour le concours : On peut hésiter à faire un appel au cours aussi "décisif" qui pourrait être interprété comme du bluff, et traité en conséquence.

Lorsqu'on se retrouve seul devant sa feuille, on doit rapidement décider du niveau de vérité que l'on désire atteindre, et choisir entre plusieurs options :

> *Option 1* : L'énoncé nous demande de démontrer que le birapport est réel si et seulement si les points sont alignés ou cocycliques. Il s'agit d'un résultat de cours, faisant partie du "bagage standard du candidat" tel que décrit dans le programme officiel du concours. Je peux donc y faire appel (de façon aussi précise que possible).

Avantages : Je traite rapidement la question, et je peux utiliser le temps ainsi économisé pour avancer ailleurs dans le sujet.

Inconvénients : Je risque de déplaire au correcteur, puisque l'énoncé me demande de montrer ce résultat, et non pas de le rappeler. Je risque aussi d'être classé parmi les "bluffeurs" qui ne connaissent pas ce résultat, mais l'affirment de façon péremptoire. Il est vrai que le reste de la copie montrera au correcteur si j'ai tendance à bluffer à chaque moment, ou si je sais bien de quoi je parle, en général, et cela modulera sans aucun doute la note que j'obtiendrai à cette question.

> *Option 2* : Je profite de cette question pour montrer au correcteur que je sais que la condition $[A, B, C, D] \in \mathbb{R}$ se ramène au célèbre critère de cocyclicité utilisant des angles de droites ([1], Corollaire 15).

En effet, avec des mesures d'angles de droites (donc modulo π),

$$\begin{aligned}
[A, B, C, D] \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right) = 0 \quad (\pi) \\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) \quad (\pi)\,.
\end{aligned}$$

Par suite, en notant Ox le premier axe de coordonnées $(O, \overrightarrow{u})$,

$$\begin{aligned}
[A, B, C, D] \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg(c-a) - \arg(c-b) = \arg(d-a) - \arg(d-b) \ (\pi) \\
&\Leftrightarrow (Ox, \overrightarrow{AC}) - (Ox, \overrightarrow{BC}) = (Ox, \overrightarrow{AD}) - (Ox, \overrightarrow{BD}) \quad (\pi) \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) \quad (\pi) \\
&\Leftrightarrow A,\ B,\ C,\ D \text{ alignés ou cocycliques.}
\end{aligned}$$

Avantages : Il y a fort à parier que ce soit là la solution attendue par le correcteur. Je montre en tout cas combien je sais faire le lien entre affixes et angles de droites, et donne précisément le critère de cocyclité en termes

d'angles de droites. Il s'agit, certes, d'un appel au cours, mais j'ai montré ce que je savais faire au correcteur, et cette solution ne peut être du bluff.

Inconvénients : J'utilise un autre résultat du cours, et je me pose toujours la question de savoir si ce résultat peut être admis.

> *Option 3* : Je démontre les deux critères de cocyclicité en termes d'angles de droites, ou en termes d'affixes. Ces critères sont des conséquences directes de la recherche des lignes de niveau de la fonction $M \mapsto (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (π), et la preuve est à connaître ([1], Théorème 180) pour passer le concours, et fait partie d'une leçon d'oral au CAPES.

Avantages : Il n'y aura plus rien à dire.

Inconvénients : Je vais perdre du temps pour retrouver et rédiger cette preuve. J'hypothèque ainsi la suite de l'épreuve, et risque de me faire dépasser par d'autres candidats.

Je risque en outre de ne pas retrouver cette démonstration, même en y consacrant dix minutes (ce qui est important dans une épreuve en temps limité), ou encore d'écrire des choses fausses.

Cela m'énervera et je ne serai pas en bonne condition pour affronter les questions suivantes.

En conclusion, je choisis l'Option 2, en me réservant (mentalement) la possibilité de revenir détailler ce point s'il me reste du temps à la fin de l'épreuve.

Il est primordial d'engranger en priorité tous les points que je peux obtenir sur le sujet, et pour cela de montrer au correcteur "tout ce que je sais faire" sur le problème dans son ensemble, et non pas "en profondeur", sur une seule question.

Si je ne trouve plus rien d'intéressant à dire sur le problème, et s'il me reste du temps en fin d'épreuve, il est certain que je ne quitterai pas la salle, mais en profiterai pour me relire (dans tous les sens, et à l'envers s'il le faut !) ou pour m'attaquer aux questions que j'avais laissé de côté. Je dispose alors de tout le temps restant.

II.2. On a

$$[A, B, C, D] = -1 \Leftrightarrow (c-a)(d-b) = (a-d)(c-b) \quad (3)$$

et il est facile de démontrer que (3) équivaut à (1), et à (2). On peut simplifier cette vérification en plaçant l'origine du repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en A, de sorte que

l'affixe a soit nulle. Dans ce cas, (1), (2) et (3) s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} 2cd = b\,(c+d) & (1') \\ \left(c-\dfrac{b}{2}\right)\left(d-\dfrac{b}{2}\right) = \dfrac{b^2}{4} & (2') \\ c\,(d-b) = -d\,(c-b) & (3') \end{cases}$$

et on voit immédiatement que $(1')$ équivaut à $(3')$. En développant,

$$\left(2'\right) \;\Leftrightarrow\; cd - \frac{1}{2}bd - \frac{1}{2}bc = 0 \;\Leftrightarrow\; 2cd = b\,(c+d) \;\Leftrightarrow\; \left(1'\right),$$

et tout est démontré.

Remarque : Ce que l'on vient de faire est licite puisque revient :

- à utiliser un changement de repère (une translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$), donc un changement d'affixes, pour nous placer dans le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (si z et z' représentent l'ancienne et la nouvelle affixe d'un même point, on a $z = z' + a$) ;

- à démontrer les équivalences qui nous intéressent avec ces nouveaux affixes ;

- puis à retourner dans le premier repère pour retrouver les équations de l'énoncé.

II.3. Avec les quatre points de la partie I,

$$\begin{cases} 2\,(ab+cd) = 2\,(-2i\,(-2+2i) - 2\,(2+4i)) = -8i \\ (a+b)\,(c+d) = (-2)\times 4i = -8i \end{cases}$$

et l'égalité (1) de la question précédente est satisfaite, montrant que le quadrangle $ABCD$ est harmonique.

II.4. L'affixe ι du milieu I de $[AB]$ est $\frac{a+b}{2}$. En prenant le module des deux membres de la relation (2), on obtient $|c-\iota| \times |d-\iota| = |\iota|^2$, autrement dit $IC \times ID = AB^2/4$.
Pour vérifier que (AB) est la bissectrice du couple de demi-droites $([IC), [ID))$, choisissons l'origine O du repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en I. La relation (2) s'écrit alors $cd = a^2$, ce qui entraîne

$$\arg c + \arg d = 2\arg a \quad (2\pi)$$

soit $\arg c - \arg a = \arg a - \arg d \;\; (2\pi)$. Compte tenu de

$$\begin{cases} \arg c - \arg a = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \\ \arg a - \arg d = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ID}) = (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA}), \end{cases}$$

cela donne $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA}) \;\; (2\pi)$, et cette dernière égalité signifie que $(IA) = (AB)$ est la bissectrice du couple $([IC), [ID))$.

Exercice 3

I.1.a. Dans la FIG. 2, x vaut 0 ou 1 et représente le message émis par E_0, et je note commodément $q = 1 - p$.

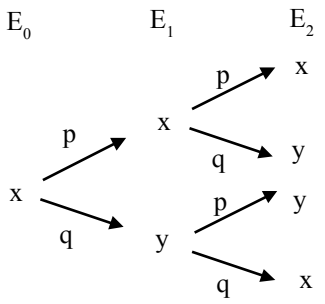

FIG. 2 – Arbre pondéré

I.1.b. On a $p_1 = p(A_1) = p$, et la "lecture" de l'arbre donne

$$p_2 = p(A_2) = p^2 + q^2.$$

La justification de cette seconde formule est donnée en I.2.

I.2. L'événement A_{k+1} est la réunion disjointe de $A_{k+1} \cap A_k$ et $A_{k+1} \cap \overline{A}_k$, où l'on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. On a alors

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p(A_{k+1}) = p(A_{k+1} \cap A_k) + p\left(A_{k+1} \cap \overline{A}_k\right) \\ &= p(A_{k+1}/A_k)\, p(A_k) + p\left(A_{k+1}/\overline{A}_k\right) p\left(\overline{A}_k\right) \\ &= p \times p_k + q \times (1 - p_k) \\ &= (p - q)\, p_k + q = (2p - 1)\, p_k + 1 - p. \end{aligned}$$

I.3.a.i.

$$\begin{aligned} u_{k+1} = p_{k+1} - \frac{1}{2} &= (2p - 1)\, p_k + \frac{1}{2} - p \\ &= (2p - 1)\left(u_k + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - p = (2p - 1)\, u_k \end{aligned}$$

donc (u_k) est une suite géométrique de raison $(2p - 1)$.

I.3.a.ii. On en déduit

$$u_n = (2p - 1)^n\, u_0 = \frac{(2p - 1)^n}{2}$$

d'où

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right).$$

I.3.b. Puisque $0 < p < 1$, on a $0 < 2p - 1 < 1$ et $\lim_{n\to+\infty}(2p-1)^n = 0$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1/2$.

I.3c. Lorsque n devient grand, la probabilité pour que l'élément E_n reçoive le message effectivement transmis par E_0 se rapproche de $1/2$. Un récepteur situé "trop loin" de E_0 n'aura donc aucun moyen de connaître la nature du signal transmis. Quelle que soit la qualité du canal de transmission utilisé (autrement dit, quel que soit la valeur de p), il est toujours indispensable de limiter le nombre de relais lorsqu'on désire transmettre une information.
A titre d'exemple, le tableau suivant et la FIG. 3 montrent quelques valeurs de p_n lorsque $p = 0,98$, donc dans le cas d'une très bonne transmission.

n	1	2	4	8	16	32	64	128
p_n	0,98	0,961	0,925	0,861	0,760	0,635	0,536	0,503

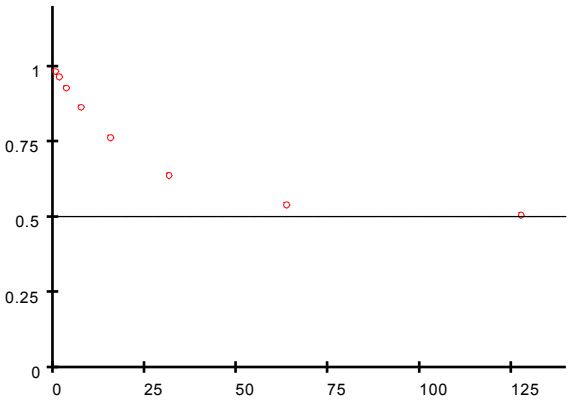

FIG. 3 – Probabilité p_n en fonction de n

II.1. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k recepteurs pour lesquels le message est correctement reçu, parmi les n récepteurs "à l'écoute". La probabilité cherchée est donc $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, en notant $q = 1 - p$.

II.2.a. $(Y = 0)$ est l'événement : "Aucun récepteur ne reçoit la valeur émise par E_0".

II.2.b.Comme $p(B_n) = p(X = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, on obtient

$$p((Y = 0) \cap B_n) = p((Y = 0)/B_n) \times p(B_n) = q^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n \lambda^n}{n!}.$$

II.2.c. Lorsqu'aucun récepteur ne reçoit la valeur émise par E_0, il se peut qu'il n'y ait aucun récepteur à l'écoute, ou bien qu'il en ait un seul, ou bien deux, etc. L'événement $(Y = 0)$ est donc la réunion disjointe des événements $(Y = 0) \cap B_n$(où $n \in \mathbb{N}$), et

$$\begin{aligned} p(Y = 0) &= \sum_{n\geq 0} p((Y = 0) \cap B_n) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

II.2.d. • On a $(Y = k) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [(Y = k) \cap B_n]$ (réunion disjointe), et bien évidemment $(Y = k) \cap B_n = \varnothing$ dès que $n < k$. Ainsi

$$\begin{aligned} p(Y = k) &= \sum_{n\geq k} p((Y = k) \cap B_n) \\ &= \sum_{n\geq k} p((Y = k)/B_n) \times p(B_n) \\ &= \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \end{aligned}$$

et

$$p(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n\geq k} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \times e^{\lambda q} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}.$$

Cela montre que Y obéit à une loi de Poisson de paramètre λp.

• D'après le cours, l'expérance et la variance d'une loi de Poisson Y de paramètre λp sont égales à λp.

Remarque : Vérifions que l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ d'une loi de Poisson X de paramètre λ est λ. Tout d'abord

$$E(X) = \sum_{k\geq 0} kp(X = k) = \sum_{k\geq 1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k'\geq 0} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = \lambda.$$

Ensuite

$$\sum_{k\geq 0} k(k-1)p(X = k) = \sum_{k\geq 2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k\geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2,$$

d'où

$$\sum_{k\geq 0} k^2 p\left(X=k\right) - \sum_{k\geq 0} kp\left(X=k\right) = \lambda^2.$$

Cela s'écrit $E\left(X^2\right) - E\left(X\right) = \lambda^2$ et nous offre l'espérance du carré de la variable, soit $E\left(X^2\right) = \lambda + \lambda^2$. On en déduit $V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = \lambda$.

Exercice 4

1. Le système

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 + 2b_1 = 0 \\ b_0 + 3b_1 + 3b_2 = 0 \\ b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 = 0 \\ b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3 + 5b_4 = 0 \end{array}\right.$$

se résout de proche en proche. On trouve $b_1 = -1/2$, puis

$$\left\{\begin{array}{l} b_2 = -\dfrac{1}{3}\left(b_0 + 3b_1\right) = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{6}, \\ b_3 = -\dfrac{1}{4}\left(b_0 + 4b_1 + 6b_2\right) = -\dfrac{1}{4}\left(1 - 2 + 1\right) = 0, \\ b_4 = -\dfrac{1}{5}\left(b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3\right) = -\dfrac{1}{5}\left(1 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{3}\right) = -\dfrac{1}{30}. \end{array}\right.$$

2. On trouve

$$\left\{\begin{array}{l} B_1\left(X\right) = b_0 X + b_1 = X - \dfrac{1}{2}, \\ B_2\left(X\right) = b_0 X^2 + 2b_1 X + b_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}, \\ B_3\left(X\right) = b_0 X^3 + 3b_1 X^2 + 3b_2 X + b_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X. \end{array}\right.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, on a $B_n\left(0\right) = \binom{n}{n} b_n = b_n$. Pour tout $n \geq 2$, on trouve

$$B_n\left(1\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k + b_n = 0 + b_n = b_n$$

en utilisant la relation de récurrence qui définit les coefficients de Bernoulli b_k.

4.

$$\begin{aligned} B_n'(X) &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}b_k X^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}b_k X^{n-k-1} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_k X^{n-k-1} = nB_{n-1}(X). \end{aligned}$$

5. La question précédente montre qu'une primitive de $B_n(t)$ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{n+1}B_{n+1}(t)$, donc

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\left[B_{n+1}(t)\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\left(b_{n+1}-b_{n+1}\right) = 0.$$

6. La propriété est vraie lorsque $n=1$, puisque

$$B_1(X+1) - B_1(X) = (X+1) - \frac{1}{2} - \left(X - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Supposons que la propriété annoncée soit vraie jusqu'au rang $n-1$ (avec $n \geq 2$), et montrons-là au rang n. Il s'agit de prouver que le polynôme

$$\xi(X) = B_n(X+1) - B_n(X) - nX^{n-1}$$

est nul. En dérivant et en appliquant la question 4, on trouve

$$\begin{aligned} \xi'(X) &= B_n'(X+1) - B_n'(X) - n(n-1)X^{n-2} \\ &= nB_{n-1}(X+1) - nB_{n-1}(X) - n(n-1)X^{n-2} \\ &= n\left(B_{n-1}(X+1) - B_{n-1}(X) - (n-1)X^{n-2}\right) = 0 \end{aligned}$$

de sorte que $\xi(X)$ soit un polynôme constant.
Comme $\xi(0) = B_n(1) - B_n(0) = b_n - b_n = 0$ (d'après la question 3), on obtient bien $\xi(X) = 0$ et l'on peut conclure.

7. D'après la question précédente,

$$\forall n \geq 0 \qquad k^n = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)\right)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{m} k^n = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)\right).$$

Si $n = 2$, on obtient $\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{1}{3} B_3 (m+1)$ puisque $B_3 (0) = b_3 = 0$. Le polynôme $B_3 (X)$ a été calculé à la question 2, et l'on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{1}{3} B_3 (m+1) &= \frac{1}{3}\left((m+1)^3 - \frac{3}{2}(m+1)^2 + \frac{1}{2}(m+1)\right) \\ &= \frac{1}{3}(m+1)\left((m+1)^2 - \frac{3}{2}(m+1) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.\end{aligned}$$

8.a. On a $A_0 (X) = B_0(1-X) = 1$. Compte tenu de ce que nous demande d'admettre l'énoncé, on aura prouvé que $A_n = B_n$ pout tout entier n si l'on montre que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & A_n' (X) = n A_{n-1} (X) \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & \int_0^1 A_n (t)\ dt = 0. \end{cases}$$

La vérification est facile :

$$A_n' (X) = (-1)^{n-1} B_n'(1-X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = n A_{n-1} (X)$$

et

$$\int_0^1 A_n (t)\ dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\, dt = (-1)^{n-1} \int_1^0 B_n(u)\, du = 0.$$

8.b. De $(-1)^n B_n(1-X) = B_n(X)$ on déduit $(-1)^n B_n(1) = B_n(0)$, donc $b_n ((-1)^n - 1) = 0$. Par suite $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

9.a. Compte tenu de $B_n' = n B_{n-1}$, une intégration par partie donne

$$\int_0^1 f^{(n)} (t) B_n (t)\ dt = \left[f^{(n-1)} (t) B_n (t) \right]_0^1 - n \int_0^1 f^{(n-1)} (t) B_{n-1} (t)\ dt,$$

puis la formule annoncée puisque $B_n (0) = B_n (1) = b_n$.

9.b. On applique deux fois de suite la formule du 9.a et l'on utilise l'égalité $b_{2p+1} = 0$ déjà prouvée :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^{(2k+1)} (t) B_{2k+1} (t)\ dt &= -(2k+1) \int_0^1 f^{(2k)} (t) B_{2k} (t)\ dt \\ &= -(2k+1) \Big(\quad b_{2k}(f^{(2k-1)} (1) - f^{(2k-1)} (0)) \\ &\qquad - 2k \int_0^1 f^{(2k-1)} (t) B_{2k-1} (t)\ dt \quad \Big).\end{aligned}$$

On obtient la formule demandée en divisant à droite et à gauche l'égalité obtenue par $(2k+1)!$.

9.c. Si l'on pose $S_k = \frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 f^{(2k+1)}(t)\, B_{2k+1}(t)\, dt$, la question 9.b donne

$$S_k - S_{k-1} = -\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)).$$

En sommant, on trouve

$$S_p - S_0 = \sum_{k=1}^{p}(S_k - S_{k-1}) = -\sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)). \quad (*)$$

Comme

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^1 f'(t)\, B_1(t)\, dt = \int_0^1 t f'(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\, dt \\ &= [tf(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) \\ &= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \int_0^1 f(t)\, dt, \end{aligned}$$

il suffit de remplacer dans $(*)$ pour obtenir la formule demandée :

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) - S_p.$$

Bibliographie

[1] D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2004.

[2] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. II, Publibook, 2006.